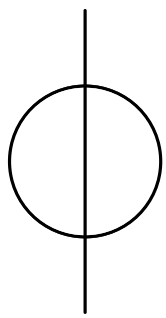
Satz (Lemma von Study)**.** Es seien $f, g \in \mathbb{C}[X,Y]$, wobei $Grad(f) \geq 1$ ist und g ein irreduzibles Polynom ist, ferner sei $C = V(f)$. Ist $\#V(f) \cap \#V(g) = \infty$, dann gilt $g \mid f$ und somit $V(g) \subset V(F)$.

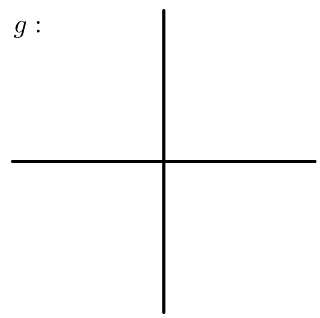
Bemerkungen. 1. Eine weitere gebräuchliche Formulierung des *Lemmas von Study* lautet:
Aus $V(g) \subset V(f)$ folgt $g \mid f$. Wegen $\#V(g) = \infty$, folgt aus $V(g) \subset V(f)$ sofort $\#V(g) \cap V(f) = \infty$.

2. Ist g reduzibel, so gilt die Aussage i. A. nicht. Betrachte dazu folgendes Gegenbeispiel: Seien $f = X(X^2 + Y^2 - 1)$ und $g = XY$. Dann ist $V(f) \cap V(g) = V(X)$ und $\#V(f) \cap V(g) = \infty$, jedoch gilt $g \nmid f$.

f :



g :



Folgerungen. 1. Sind $f, \tilde{f} \in \mathbb{C}[X,Y]$ und $V(f) = V(\tilde{f})$, dann besitzen f und $\tilde{f}$ die gleichen irreduziblen Faktoren. Dies können wir unmittelbar verifizieren: ist $g \in \mathbb{C}[X,Y]$ ein irreduzibler Faktor von f, d.h. $g \mid f$ bzw.

$$V(g) \subset V(f) = V(\tilde{f})$$

so folgt aus dem Lemma von Study $g \mid \tilde{f}$.

2. Ist $g \in \mathbb{C}[X,Y]$ ein irreduzibles nicht-konstantes Polynom, so ist die Kurve $V(g)$ irreduzibel, d.h. für zwei beliebige nicht-konstante Polynome $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[X,Y]$ mit $V(g) = V(f_1) \cup V(f_2)$ gilt:

$$V(g) = V(f_1) = V(f_2)$$

Beweis. Sei $h \in \mathbb{C}[X,Y]$ ein irreduzibler Faktor von f_1, dann gilt $V(h) \subset V(f_1) \subset V(g)$. Aus dem Lemma von Study folgt dann $h \mid g$, und da g irreduzibel ist folgt sofort $g = \lambda.h$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$. Also gilt:

$$V(h) = V(g) = V(f_1)$$

Analog argumentiert man für f_2. □

3. Ist $C = V(f)$ für ein nicht-konstantes Polynom $f \in \mathbb{C}[X,Y]$, dann lässt sich f schreiben als $f = f_1^{n_1}.f_2^{n_2}.\dots.f_r^{n_r}$, für gewisse $n_1, ..., n_r \in \mathbb{N}$ und irreduzible Polynome $f_i \in \mathbb{C}[X,Y]$, $1 \leq i \leq r$ mit $f_i \nmid f_j$ für alle $i \neq j$. Wir setzen $C_i := V(f_i)$ für $1 \leq i \leq r$. Dann sind die Kurven C_i irreduzible Teilkurven der Kurve C. Man nennt die C_i die *irreduziblen Komponenten von* C und für diese gilt

$$C = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_r$$

Umgekehrt bestimmen die Teilkurven C_i die zugehörigen Polynome f_i eindeutig bis auf Multiplikation mit Skalaren $\neq 0$. Die „einfachste“ Gleichung für C lautet also

$$f_R = f_1.f_2.\dots.f_r = 0$$

Man bezeichnet diese als *reduzierte Gleichung für* C, dabei ist f_R ein Polynom kleinsten Grades, für das $V(f) = V(f_R)$ gilt. Offenbar ist die reduzierte Gleichung für C ist eindeutig bis auf Multiplikation mit einem Element aus $\mathbb{C}^\times$, d.h. ist $f'_R = 0$ ebenfalls eine reduzierte Gleichung für C, d.h. ein Polynom mit $V(f'_R) = V(f_R)[= V(f)]$, dann gilt $f_R = \lambda.f'_R$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}^\times$.

4. Der *Grad* einer affin-algebraischen Kurve $C = V(f)$ ist definiert als der Grad des Polynoms $f_R \in \mathbb{C}[X,Y]$ der reduzierten Gleichung für C, d.h. $Grad(C) := Grad(f_R)$. Ist beispielsweise $f = (X^2 + Y^2 - 1)^2$, so ist $Grad(V(f)) = 2$, da eine reduzierte Gleichung von $V(f)$ die Kreisgleichung $f_R = X^2 + Y^2 - 1 = 0$ mit $Grad(f_R) = 2$ ist.

5. Sind C, D affin-algebraische Kurven mit $\#(C \cap D) = \infty$, so haben C und D eine *gemeinsame Komponente*. Dies wird ersichtlich, schreibt man $C = C_1 \cup ... \cup C_r$ mit irreduziblen Kurven C_i, denn aus $\#(C \cap D) = \infty$ folgt somit, dass ein $i \in \{1, ..., r\}$ existiert, für welches $\#C_i \cap D = \infty$ gilt. Aus dem Lemma von Study folgt $C_i \subset D$.

6. Für zwei affin-algebraische Kurven C, D, welche keine gemeinsame Komponente besitzen, gilt daher entsprechend

$$\#(C \cap D) < \infty$$

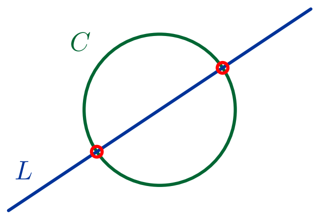
(2.4) ***Projektion; Schnitt mit Geraden***

Ist L eine Gerade und $C = V(f)$ eine beliebige affin-algebraische Kurve, mit $\#(C \cap L) < \infty$, so gilt

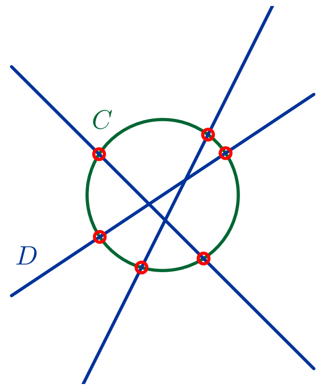
$$\#(C \cap L) \leq Grad(f) \text{ bzw. } \#(C \cap L) \leq Grad(C)[\leq Grad(f)]$$

Allgemeiner existiert für die Anzahl der Schnittpunkte mit einer beliebigen weiteren affinen-algebraischen Kurve D mit $\#(C \cap D) < \infty$ die obere Schranke

$$\#(C \cap D) \leq Grad(C).Grad(D)$$



(a) $L : X - 1.5Y = 0$,
$C : X^2 + Y^2 = 1$



(b) $C : X^2 + Y^2 = 1$,
$D = L_1 \cup L_2 \cup L_3$

Tatsächlich gilt sowohl in (a) als auch in (b) die Gleichheit, also $\#C \cap L = Grad(C).Grad(L)$, denn D ist offenbar die Verschwindungsmenge von drei verschiedenen (reduzierten) Geradengleichungen, d.h. das Produkt dreier Polynom vom Grad 1, also eines Polynoms 3.Grades.

(2.7) ***Resultante; Beispiele***

Für $f = a_0Y^n + a_1Y^{n-1} + ... + a_n \in \mathbb{C}[X][Y]$ und $g = b_0Y^m + b_1Y^{m-1} + ... + a_m \in \mathbb{C}[X]$ mit $a_0, ...a_n, b_0, ..., b_m \in \mathbb{C}[X][Y]$ und $a_0, b_0 \neq 0$ ist die *Resultante* definiert durch

$$R_{f,g} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & & & \\ & & \ddots & & & \\ b_0 & b_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & b_0 & \dots & & b_m \end{vmatrix} \in \mathbb{C}[X]$$

wobei in der Sylvester-Matrix oben $m \geq n$ angenommen wird.

Wir betrachten zwei Kurven $C = V(f)$ und $D = V(g)$, die keine gemeinsame Komponente besitzen, d.h. für die $\#C \cap D < \infty$ gilt. Nach einem Satz aus Kapitel **????(!!!VL 25.4.16 !!!)** ist also ihre Resultante $R_{f,g} \neq 0$. Allgemein gilt für jeden Schnittpunkt (c, d) der Kurven C und D:

$$(c, d) \in C \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} f(c, d) = 0 \\ g(c, d) = 0 \end{cases}$$

Diese Aussage wiederum ist äquivalent dazu, dass die beiden Polynome in $f(c, Y), g(c, Y) \in \mathbb{C}[Y]$ eine gemeinsame Nullstelle d besitzen. Dies ist gleichbedeutend damit, dass Resultante von $f(c, Y)$ und $g(c, Y)$ an der Stelle d verschwindet, d.h.

$$R_{f(c,Y),g(c,Y)} = 0$$

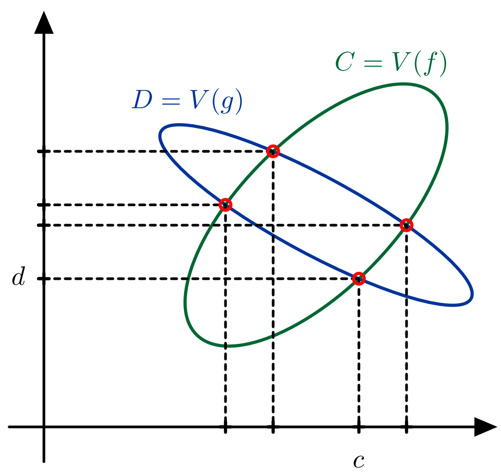
Werten wir f und g, so wird dies ersichtlich:

$$f(c, Y) = a_0(c)Y^n + a_1(c)Y^{n-1} + ... + a_n(c)$$
$$g(c, Y) = b_0(c)Y^m + b_1(c)Y^{m-1} + ... + b_m(c)$$

Ist nun $a_0(c) \neq 0$ und $b_0(c) \neq 0$, so gibt es in der Sylvester-Matrix keine Nullspalte. Also gilt

$$R_{f(c,d,),g(c,d)} = R_{f,g}(c)$$

Ist umgekehrt $R_{f,g}(c) \neq 0$, $a_0(c) \neq 0$ und $b_0(c) \neq 0$, so existiert ein $d \in \mathbb{C}$ derart, dass $(c, d) \in C \cap D$ richtig ist, d.h. (c, d) ein Schnittpunkt ist.

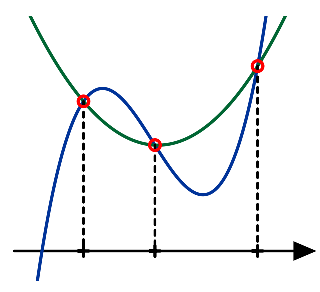


Beispiele.

1. Sind zwei Kurven durch die Polynome $f = Y + a_1(X)$ und $g = Y + b_1(X) = 0$, also $a_0 = b_0 = 1$ gegeben, so erhält man für die Resultante:

$$R_{f,g} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & b_1 \end{vmatrix} = b_1 - a_1 \in \mathbb{C}[X]$$

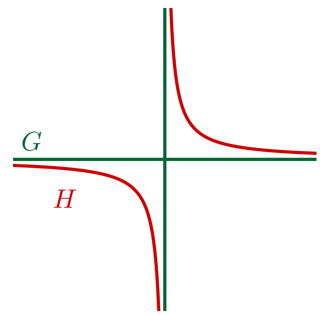
Die Nullstellen von $R_{f,g}$ sind dabei genau die x-Werte der Schnittpunkte von $V(f)$ und $V(g)$.



2. Sind $h = XY + 1$ und $g = XY + 0$, so beschreiben die Kurven $H = V(h)$ eine Hyperbel und $G = V(g)$ die auf den beiden Achsen verlaufenden gekreuzten Geraden. Die Resultante ist gegeben durch

$$R_{g,h} = \begin{vmatrix} X & 1 \\ X & 0 \end{vmatrix} = -X$$

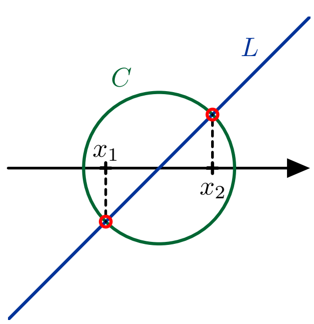
und besitzt die Nullstelle $x = 0$. Es gibt jedoch keinen Schnittpunkt von G und H an dieser Stelle, denn $G \cap H = \emptyset$.



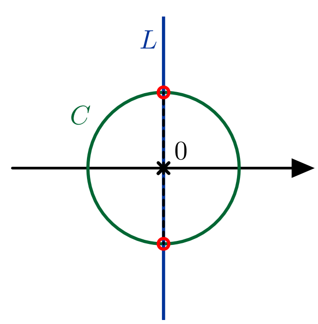
3. Wir betrachten den Fall des Schnitts des Einheitskreises $C = V(f)$, $f = X^2 + Y^2 - 1$ mit einer Ursprungsgeraden $L = V(g)$, $g = aX + bY$, (wobei $g \neq 0$). Wir erhalten die Resultante

$$R_{f,g} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & X^2 - 1 \\ b & aX & 0 \\ 0 & b & aX \end{vmatrix} = a^2X^2 + b^2(X^2 - 1) = (a^2 + b^2)X^2 - b^2$$

mit den beiden Nullstellen: $x_1 = -\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2 + b^2}}$ und $x_2 = +\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2 + b^2}}$.
Ist $b \neq 0$, so können wir die Schnittpunkte - wie in der Schule - durch Einsetzen, dass heißt ohne Zuhilfenahme der Resultante, berechnen: Zunächst stellt man die Gleichung L nach einer Variablen (etwa Y) um, also $Y = -\dfrac{aX}{b}$. Diese wird anschließend in die Kreisgleichung C eingesetzt, d.h. $X^2 + \dfrac{-aX}{b} - 1 = 0$. Die beiden Nullstellen erhält man nun z.B. mit Hilfe der pq-Formel. Ist $b = 0$ (d.h. die beiden Schnittpunkte auf der y-Achse), können wir so nicht vorgehen. Die Berechnung mittels der Resultante $R_{f,g}$ liefert für diesen Fall dennoch das richtige Ergebnis $x_1 = x_2 = 0$.



$b \neq 0$



$b = 0$

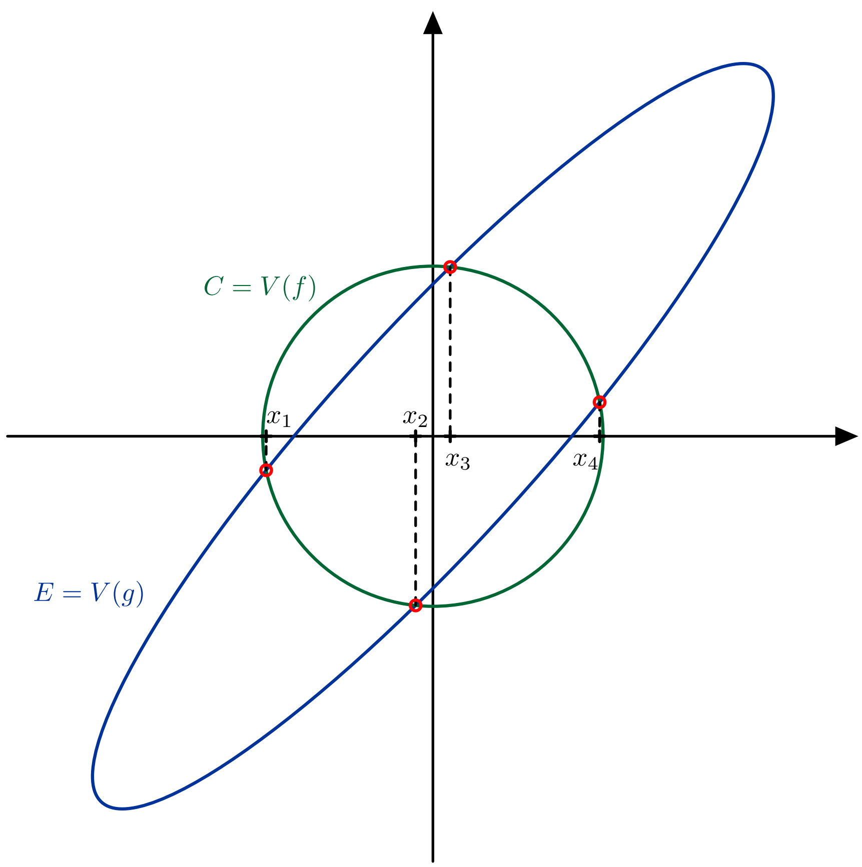
4. Betrachten wir nun den Einheitskreis $C = V(f)$ mit $f = X^2 + Y^2 - 1$ und die Ellipse $E = V(g)$ mit $g = 5(X-Y)^2 + (X^2-4) = 5Y^2 - 10XY + 6X^2 - 4$ sowie deren Resultante

$$R_{f,g} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & X^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & X^2-1 \\ 5 & -10X & 6X^2-4 & 0 \\ 0 & 5 & -10X & 6X^2-4 \end{vmatrix} = ... = 101x^4 - 98X^2 + 1$$

Mit der Substitution $U := Z^2$ und der pq-Formel berechnen wir die vier Nullstellen

$$x_1 = -\frac{1}{101}\sqrt{4949 + 1010\sqrt{23}}, \qquad x_2 = -\frac{1}{101}\sqrt{4949 - 1010\sqrt{23}},$$
$$x_3 = +\frac{1}{101}\sqrt{4949 + 1010\sqrt{23}}, \qquad x_4 = +\frac{1}{101}\sqrt{4949 - 1010\sqrt{23}}$$

Da alle 4 Lösungen reell sind, befinden sich alle 4 Schnittpunkte in der reellen Ebene $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$.

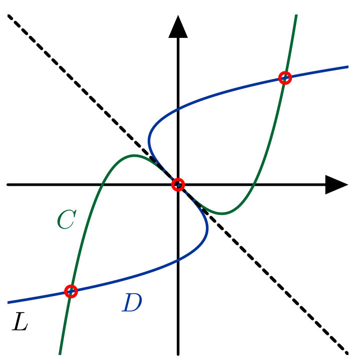


5. Es sei $f = Y - a(X^3 - X)$ und $g = -X + a(Y^3 - Y) = aY^3 - aY - X$. Die Kurve $C = V(f)$ beschreibt den Graphen einer der Polynomfunktion 3.Grades $\tilde{f}(x) = a(x^3 - x)$ mit den Nullstellen $-1, 0, 1$; die Kurve $D = V(g)$ ist genau die Spiegelung von C an der Geraden $L = V(X - Y)$. Wir berechnen Resultante von f, g:

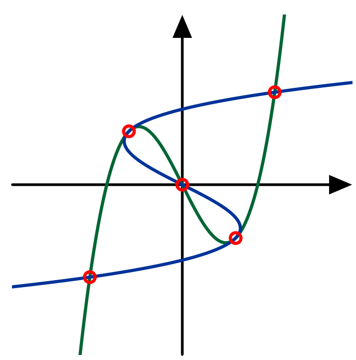
$$
\begin{aligned}
R_{f,g} &= \begin{vmatrix} 1 & a(X^3 - X) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a(X^3 - X) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a(X^3 - X) \\ a & 0 & -a & -X \end{vmatrix} \\
&= X(aX^2 - a - 1)(aX^2 - a + 1)(a^2X^4 - a^2X^2 + 1)
\end{aligned}
$$

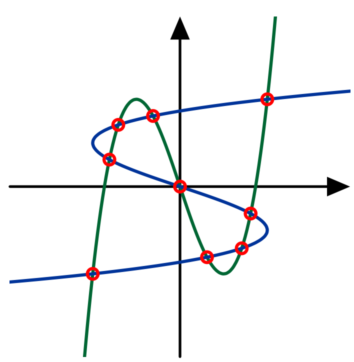
Wir interessieren uns für das Verhalten der Nullstellen von $R_{f,g}$. Ist $a = 1$, dann ist $R_{f,g} = X^3(X^2 - 2)(X^4 - X^2 + 1)$, d.h es gibt eine 3-fache Nullstelle bei $x = 0$, zwei einfache Nullstellen bei $x = -\sqrt{2}$ und $x = +\sqrt{2}$ und 4 komplexe Nullstellen. Für $a = 2$ ist $R_{f,g} = X(2X^2 - 3)(2X^2 - 1)^3$ sind alle Nullstellen reell: einfache bei $x = 0$, $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ und $x = +\sqrt{\frac{3}{2}}$ sowie je 3-fache bei $x = -\frac{1}{2}$ und $x = +\frac{1}{2}$. Im Fall $a > 2$ erhalten wir stets 9 verschiedene (reelle) Nullstellen.

1.Fall: $0 < a \leq 1$, Plot: $a = 1$



2.Fall: $1 < a \leq 2$, Plot: $a = 2$





3.Fall: $a > 2$, Plot: $a = 3$